

# Czy przekształcenie Lorentza jest obrotem, czyli: jak z dziury zrobiono górę

Jan Czerniawski  
Instytut Filozofii UJ, Kraków

Jak wiadomo, przekształcenia Lorentza wykazują daleko idącą formalną analogię z obrotami. Podobnie jak obroty odległość przestrzenną, zachowują one analogiczną wielkość, jaką jest interwał czasoprzestrzenny. Wraz z obrotami tworzą też wspólną grupę, podczas gdy nie tworzą jej np. same przekształcenia Lorentza odpowiadające ruchom w różnych kierunkach, jak to było w przypadku przekształceń Galileusza. Po odpowiednim przeskalowaniu czasu wzory przekształceń Lorentza można doprowadzić do postaci identycznej z wzorami przekształceń obrotu, z dokładnością do znaków współczynników, w których sinusy i kosinusy parametru przekształcenia zastępują sinusy i kosinusy hiperboliczne.

Jeszcze dalej wspomnianą analogię posunąć można, wzorem H. Minkowskiego zastępując współrzędne czasowe rzeczywiste przez urojone. Wzory przekształceń stają się wtedy całkowicie identyczne z wzorami obrotów, zarówno co do znaków współczynników, jak i co do ich postaci, jako wziętych z odpowiednimi znakami sinusów i kosinusów parametru, którym w przypadku obrotów jest kąt obrotu. Niektórych autorów podręczników skłania to wręcz do stwierdzenia, że przekształcenia Lorentza są po prostu czasoprzestrzennymi obrotami w płaszczyznach, których jednym z wymiarów jest czas.

Taka teza jednak, rozumiana dosłownie, byłaby zdecydowanie przesadzona. Przede wszystkim, płaszczyzna, w której ten „obrot” się dokonuje, nie jest płaszczyzną euklidesową, lecz pseudoeuklidesową. Konsekwencją tego faktu jest m. in. niemożliwość nałożenia, jak w przypadku zwykłego obrotu, jednej osi współrzędnych na drugą. Ponadto, „kąt”, o który „obrotem” miałoby być przekształcenie Lorentza, jest urojony, co oznacza, że mamy do czynienia z pseudoobrotem, którego nie należy mylić z obrotem, podobnie jak przestrzeni pseudoeuklidesowej nie należy mylić z euklidesową, a pseudometryki z metryką.

Różnicę nietrudno zauważyć na diagramie Minkowskiego, gdzie przekształcenie Lorentza, w odróżnieniu od obrotu, osie układu współrzędnych prostokątnych przeprowadza zawsze w osie układu współrzędnych skośnych. Oczywiście można próbować złożyć to na karb niedoskonałości takiego diagramu jako euklidesowego obrazu przestrzeni pseudoeuklidesowej, w której oba te układy są ortogonalne, tj. w określonym sensie

prostokątne. Żadna argumentacja tego rodzaju nie zmieni jednak faktu, iż np. obie dodatnie półosie jednego z tych układów zawierają się w ćwiartce wyznaczonej przez dodatnie półosie drugiego.

Jako zbieżny z powyższym, dodać można następujący argument: Czasoprzestrzeń szczególnej teorii względności i czasoprzestrzeń Galileusza, a także zwykła przestrzeń euklidesowa, mają taką samą strukturę afiniczną, a więc są „afinicznie porównywalne”. Nie można zatem np. rysować jako takich samych przekształceń, które są afinicznie różne [1].

Już samo nazywanie przekształcenia Lorentza „obrotem”, aczkolwiek w zasadzie dopuszczalne jako pewna przenośnia w tekstach skierowanych do specjalistów, gdzie przecież np. pseudometrykę czasoprzestrzeni w skrócie nazywa się zwykle „metryką”, jest ryzykowne w podręcznikach, nawet akademickich, nie mówiąc o przeznaczonych do nauczania niższego szczebla. Gorzej, gdy nie towarzyszy temu stosowne wyjaśnienie, mające studenta lub ucznia zabezpieczyć przed nieporozumieniem prowadzącym do ukształtowania błędnych intuicji. Jeszcze gorzej zaś, gdy tego rodzaju przenośnia wzmacniana jest tak sugestywnym środkiem, jak przedstawiający ją dosłownie rysunek. O ile bowiem nazywać rzeczy można w zasadzie dowolnie - ostatecznie podobno po japońsku „jama” znaczy „góra” - to w przypadku przedstawień graficznych zbyt daleko posunięta dowolność jest wielce ryzykowna, zwłaszcza w zastosowaniach dydaktycznych.

Trzeba wyraźnie stwierdzić, że przedstawianie przekształcenia Lorentza jako obrotu, niezależnie od szczegółów, jest zawsze błędem rzeczowym. Żadna matematyczna sztuczka, w rodzaju zastąpienia współrzędnej rzeczywistej przez urojoną, nie zmieni teoriomnogościowych relacji między obszarami czasoprzestrzennymi, np. nie sprawi, że obszary pokryte przez dodatnie ćwiartki układów współrzędnych zaczną się przecinać, zamiast zawierać się jeden w drugim. Tym bardziej więc jest to błąd dydaktyczny, którego stopień szkodliwości zależy jednak od owych szczegółów.

Można więc, jak np. w znanym podręczniku zagranicznym [2], ilustrację taką opatrzyć komentarzem wyraźnie podkreślającym fakt, że przyjęte współrzędne czasowe i „kąta” przedstawianego „obrotu” są urojone, a zatem samego obrazka nie należy rozumieć dosłownie. Można, jak w popularnym podręczniku dla studentów uczelni technicznych [3], dodać taki komentarz, pomijając jednak to ostatnie zastrzeżenie. Można następnie, jak w innym podręczniku akademickim [4], „zapomnieć” też o urojonej wartości „kąta”, w charakterze ostrzeżenia dla czytelnika dołączając jedynie enigmatyczne stwierdzenie, iż osie układu współrzędnych zaznaczone są „symbolicznie”.

Kolejnym krokiem będzie pominięcie, znów w podręczniku dla uczelni technicznych [5], również tego ostrzeżenia. Czy można posunąć się jeszcze dalej? Okazuje się, że tak. Można mianowicie „zapomnieć” o urojonym charakterze przedstawianej współrzędnej czasowej, w dodatku w podręczniku dla uczniów szkół średnich [6]! Zarówno ze względu na treść przekazu, jak i rodzaj odbiorcy, negatywny efekt dydaktyczny, w postaci ukształtowania fałszywej intuicji, jest w tym przypadku gwarantowany. Niewiele pomoże oddalony o dwie strony komentarz, w którym słowo „obrót” wzięto w cudzysłów, nie wyjaśniając jednak sensu tego zabiegu, podczas gdy kontekst sugeruje, iż jego jedynym uzasadnieniem jest przejście od dwóch do czterech wymiarów. Tymczasem przekształcenie Lorentza w dwóch wymiarach nie bardziej jest obrotem niż w czterech, podczas gdy zwykły obrót przestrzenny jest nim w nie mniejszym stopniu w czterech wymiarach niż w dwóch.

Jak już o tym była mowa, nazwanie przekształcenia Lorentza „obrotem”, w cudzysłowie czy bez, można potraktować jako pewną przenośnię. Przenośnia taka jednak, zwłaszcza wzmocniona odpowiadającym jej dosłownej treści rysunkiem i nie opatrzona stosownym ostrzeżeniem, może zrobić uczniowi przysłowiową wodę z mózgu. Oczywiście to dobrze, że nie w sensie dosłownym, lecz przenośnym. Szkoda jednak, którą poniesie ów uczeń, a może i jego nauczyciel, będzie całkiem realna... Nie bardzo więc wiadomo, czemu taki pseudodydaktyczny zabieg ma służyć (por. [7,8]), chociaż kontekst treści zawartych w innych wymienionych podręcznikach w jakimś stopniu usprawiedliwia autorów. Z drugiej strony jednak, tenże sam kontekst sprawić może, iż nie dla wszystkich czytelników przytoczonych recenzji, którzy przecież mają prawo ufać podręcznikom akademickim, błędność tego zabiegu będzie oczywista. Przedstawione wyżej skrupulatne wyjaśnienie tej kwestii wydaje się więc celowe.

## Literatura

- [1] A. Staruszkiewicz: korespondencja.
- [2] C. Moller: *The Theory of Relativity*, Clarendon Press, Oxford 1952, str. 96.
- [3] B. Konorski: *Elementy teorii względności, relatywistycznej mechaniki i elektrodynamiki dla inżynierów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1976, str. 293.
- [4] A.K. Wróblewski, J.A. Zakrzewski: *Wstęp do fizyki t. 1*, wyd. 2, PWN, Warszawa 1984, str. 528.
- [5] L. Jacak, *Krótki wykład z fizyki ogólnej*: Wyd. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1994, str. 41.
- [6] K. Chyla, A. Warczak, B. Warczak: *Fizyka z astronomią. Od Arystotelesa do Einsteina*, >DEBIT<, Bielsko-Biała 2002, str. 100 i 108.

- [7] A. Majhofer: Od Arystotelesa do Einsteina (recenzja [6]), „Fizyka w Szkole” 1/2003;  
<http://www.wsip.com.pl/serwisy/czasfiz/strony/rec1.htm>.
- [8] A. Staruszkiewicz: Recenzja podręcznika dla liceum „Fizyka z Astronomią, od Arystotelesa do Einsteina”...,  
[http://www.ptf.agh.edu.pl/SN/staruszkiewicz\\_6.pdf](http://www.ptf.agh.edu.pl/SN/staruszkiewicz_6.pdf).